RELATÓRIO FINAL– IFSP

MÓDULO DE *SOFTWARE ON-LINE* PARA ANÁLISE DE VIGAS VIA EULER-BERNOULLI DETALHADO EM PDF

Alex Sandro Silva Coelho, (17) 99160-8248,
alex.sandro.sc05@gmail.com

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo-IFSP
Rua Pedro Vicente, 625 – Canindé – São Paulo-SP
CEP: 01109-010
Telefone: 11-3775-4570
e-mail: prp@ifsp.edu.br

Gustavo Cabrelli Nirschl, (17) 99153-2885, nirschl@gmail.com

RESUMO

Uma grande parte dos programas de computador voltados à área de Engenharia Civil apresenta apenas o resultado final ou, quando detalham o processo de resolução, é mostrada somente uma parte dos cálculos. Devido a isso, elaborou-se um módulo incorporado a um programa de computador já existente e disponível online, com entrada gráfica de desenho, para a realização da análise estrutural de vigas por meio da Teoria de Vigas de Euler-Bernoulli.

O resultado apresentado dispõe de gráficos da análise estrutural além de um relatório em PDF detalhando a teoria envolvida no processo de resolução bem como os cálculos realizados para a obtenção dos resultados. Esse é o diferencial desse programa, pois, além da visualização final dos resultados, o usuário tem acesso ao método de resolução passo a passo.

APRESENTAÇÃO (INTRODUÇÃO, JUSTIFICATIVA E OBJETIVOS)

Introdução:

No mundo hodierno, o avanço tecnológico, além de nítido, tornou-se imprescindível para a sociedade, haja vista que o seu alcance abrange desde atividades simples - como caminhar (há muitos tênis que são desenvolvidos a fim de melhorar o desempenho dos praticantes dessa atividade física) - até as

muito complexas - como cirurgias de alta periculosidade (já existem robôs capazes de percorrer e desentupir artérias e veias do corpo humano, inclusive do cérebro). Posto isso, é evidente que os setores da construção civil também estão inclusos nesse desenvolvimento, por exemplo, com o uso de programas computacionais para a realização dos projetos.

Muitos softwares, a exemplo do FTOOL (2017) - programa de análise estrutural - e o TQS (2017) - programa de dimensionamento de concreto armado - são amplamente utilizados tanto por profissionais deste ramo quanto por professores, no setor acadêmico. Entretanto, apesar de sua ampla utilização, eles apresentam, em sua maioria, apenas os resultados finais daquilo que foram solicitados, ou, quando mostram o método de resolução, não esclarecem todas as partes do processo.

Por causa disso, o Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental (NEV - 2015), grupo de pesquisa cadastrado no CNPq, tem se empenhado em desenvolver páginas na internet a fim de realizar cálculos desse âmbito profissional, mas com um diferencial singular - apresentar todo o desenvolvimento desses cálculos e gerar um arquivo em PDF em que todo o passo a passo é explicitado; ademais, também são apresentados a teoria tomada por base para sua efetuação bem como os algoritmos utilizados.

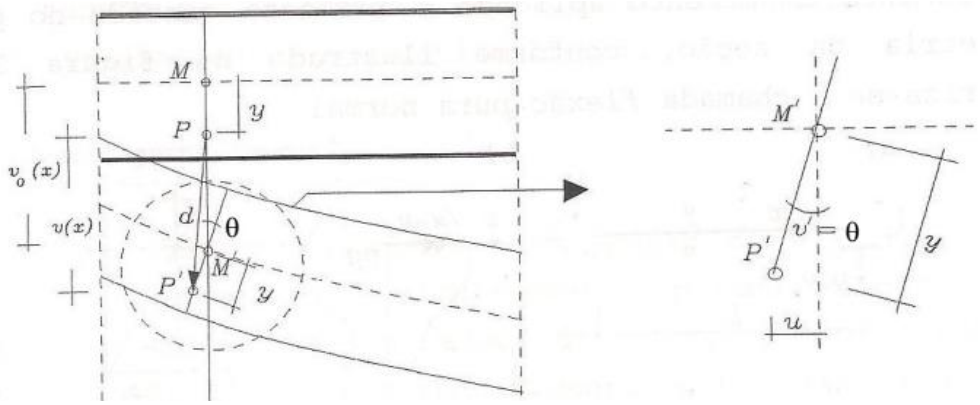
Neste relatório final, é exposto o desenvolvimento de um módulo de um software já existente que trata da análise de estruturas lineares planas. Tal módulo visa à análise estrutural de vigas horizontais (isostáticas ou hiperestáticas), valendo-se, para tanto, da teoria de vigas de Euler-Bernoulli (comumente conhecida como Teoria de Vigas Clássica), descrita na sequência, resumida em relação ao relatório parcial, devido à limitação de 25 páginas deste relatório.

Conforme Proença (2003), a teoria de vigas de Euler-Bernoulli (comumente conhecida como Teoria de Vigas Clássica), desenvolve a análise estrutural deste tipo de estrutura. Por desprezar o cisalhamento da seção transversal, considerando apenas o efeito da flexão, essa teoria é também chamada de teoria de flexão pura. Em vigas longas, os resultados fornecidos para a deformação são satisfatórios. No entanto, o mesmo não ocorre para vigas curtas. Para melhor compreensão, segundo Beer (2011), na prática, admite-se

por curta a viga cuja relação altura (h) por comprimento (L) é maior que 0,1 $(h/L > 0{,}1)$.

Proença (2003) cita que, na teoria de vigas de Euler-Bernoulli, o modelo proposto supõe que o movimento de deformação que ocorre em uma viga submetida à flexão não altera a geometria das seções, que são planas originalmente (seção que passa por M e P na figura 1); ou seja, essas seções continuarão a ser planas e ortogonais ao eixo da viga mesmo após estarem deformadas (seção que passa por M' e P' da figura 1), não importando a distância longitudinal da extremidade.

Figura 1 - Deformação de viga no modelo de Euler-Bernoulli.



Fonte: Adaptado de Proença (2003, p. 98)

A partir das hipóteses citadas, Proença (2003) desenvolve as equações (mostradas por completo no relatório parcial e no relatório e pdf do programa desenvolvido, mostrado na figura 9) e chega ao seguinte:

INTEGRAL →

$\frac{d^2M}{dx^2} = p$	$\frac{dM}{dx} = Q$	$M = E*I*\frac{d^2v(x)}{dx^2}$	$\theta = E*I*\frac{dv(x)}{dx}$	$E*I*v(x)$
p (ação distribuída)	Q (cortante)	M (momento fletor)	θ (giro)	v (deslocamento)

← DERIVADA

Quando houver alterações ou descontinuidade das funções $p(x),\ M(x),\ Q(x),\ v(x)$,ou $\theta(x)$, a viga deverá ser dividida em trechos. Posto isso, os casos mais comuns decorrentes são:

- Apoios intermediários;

- Ação (força ou momento) concentrada fora dos nós (extremidades);
- Variação da inércia $(E * I)$.

Neste caso de vários trechos, a viga terá um sistema linear de equações a resolver, de ordem igual ao número de trechos vezes quatro (referente às quatro constantes de integração que aparecem de acordo com o resumo acima).

Bittencourt (2003) apresenta o um exemplo numérico, que foi reproduzido no relatório parcial e aqui não foi colocado por conta da limitação do número de páginas.

***Justificativa*:**

Alunos, professores e demais interessados na área de Engenharia Civil necessitam ter uma compreensão ampla de seus objetos de estudo, sejam eles profissionais, acadêmicos ou pessoais. Posto isso, surge a necessidade de que os métodos de cálculo das estruturas sejam conhecidos para que possam ser analisados.

Objetivo:

Este projeto teve por finalidade desenvolver um módulo de programa que realiza a análise de vigas (isostáticas ou hiperestáticas) por meio da teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Além disso, fazendo jus ao sui generis do Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental (NEV), apresenta-se em PDF o detalhamento de todo o processo de cálculos a fim de que, dessa maneira, alunos, professores e profissionais possam utilizá-lo conforme sua necessidade.

As etapas desse desenvolvimento foram divididas em duas: a primeira consistindo em um estudo abrangente dos conceitos teóricos supracitados e a segunda consistindo na implementação de rotinas computacionais permitindo, assim, a aplicação dessas teorias.

DESENVOLVIMENTO (METODOLOGIA E ANÁLISE)

Conforme a teoria mostrada na Introdução, a seguir são apresentadas as funções que poderão ser aplicadas para qualquer barra (posteriormente as

condições de contorno serão utilizadas para obter os valores das constantes de integração).

Cortante: $Q(x) = -p * x + C_1$ (33)

Momento Fletor: $M(x) = -\left(\frac{p * x^2}{2}\right) + C_1 * x + C_2$ (34)

Giro: $E * I * \theta(x) = -\left(\frac{p * x^3}{6}\right) + \left(\frac{C_1 * x^2}{2}\right) + C_2 * x + C_3$ (35)

Deslocamento: $E * I * v(x) = -\left(\frac{p * x^4}{24}\right) + \left(\frac{C_1 * x^3}{6}\right) + \left(\frac{C_2 * x^2}{2}\right) + C_3 * x + C_4$ (36)

O algoritmo do módulo de programa referente a esta iniciação científica foi montado conforme a seguinte lógica (baseada na fundamentação teórica apresentada no item Introdução):

1) Desenhada a estrutura no IFESTRUT pelo usuário, conforme exemplo mais adiante, os nós são renumerados da esquerda para a direita.

Isso se fez necessário devido ao fato de que o usuário pode desenhar a estrutura conforme quiser, não o fazendo necessariamente da esquerda para a direita. Portanto foi usada a função gerarenumvcont(); que renumera os nós de acordo com as coordenadas.

2) Criar um vetor de constantes.

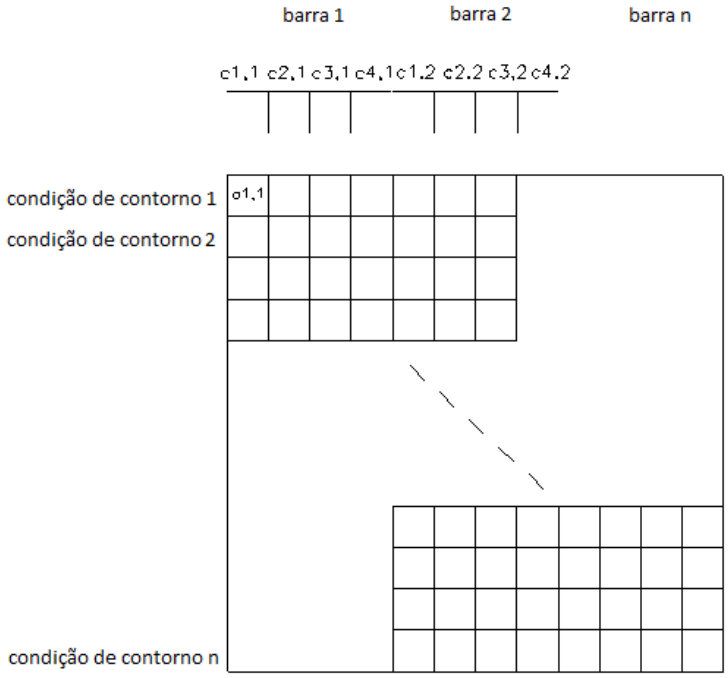
Para que houvesse relação entre as constantes das funções e a posição delas na matriz final de resolução, criou-se um vetor de constantes *c[nc,ba]* em que *nc* é o número da constante (que pode variar de 1 a 4, conforme explicado no início deste item) e *ba* é o número da barra (ou trecho), da esquerda para a direita.

3) Criar *a* e *b* do sistema global.

Em seguida foram criados, zerados, os vetores $a[i, j]$ e $b[i]$ para que, posteriormente, tivessem seus valores atribuídos às condições de contorno da estrutura desenhada. O sistema global atende à expressão $ax = b$ cuja ordem, *n*, é $4 * nb$, em que *nb* é o número de barras da estrutura desenhada.

A imagem a seguir exemplifica a correlação entre os valores das constantes *C* e suas posições $a[i, j]$ na matriz do sistema global.

Figura 6 – Correlação entre as constantes C e a posição $a[i, j]$ no sistema global.



Fonte: O próprio autor (2020).

4) Criar o sistema global com as equações padrão para cada condição de contorno.

Para todas as condições de contorno apresentadas a seguir, vale ressaltar que:

- O “x” local de cada barra desenhada terá seu valor computado da esquerda para a direita;

- “e” é o número da equação derivada da condição de contorno, contando da esquerda para a direita;

- “ba” é o número da barra (ou trecho) analisada;

- "v" é o valor numérico que multiplica c[nc,ba], ou seja, é o valor de a[i,j];

- A carga distribuída $p[ba]$ é representada no algoritmo pelo vetor salvcargay [ ].

Posto isso, seguem as possíveis condições de contorno de cada barra:

A) $Q[x] = -P$ em um dos nós da barra “ba”.

Equação do esforço cortante: $Q(x) = -p * x \ + \ C_1$

Condição de contorno número “e” (começa do 1):

$$Q[x] = -P \rightarrow -p[ba] * x + c[1, ba] = -P \rightarrow c[1, ba] = -P + p\left[ba\right] * x$$

Quando não houver carga concentrada no nó analisado, adota-se P=0. Sendo assim:

$$Q[x] = 0 \rightarrow -p[ba] * x + c[1, ba] = 0 \rightarrow c[1, ba] = p\left[ba\right] * x$$

Conforme informado anteriormente, para a montagem do sistema global foi necessário fazer uma correspondência entre as constantes “C” e a sua posição no sistema global final. Feito isso, verificou-se que a correspondência de "C1" com sua posição "a" é $4*ba-3$. Seguem exemplos:

Correspondência do "C_1" da barra 1 com a posição "a":

Barra 1 (ba = 1) $\rightarrow v * c[1,1] \rightarrow a[e,1] = v$

$4*ba-3=1$

Correspondência do "C_1" da barra 3 com a posição "a":

Barra 3 (ba = 3) $\rightarrow v * c[1,3] \rightarrow a[e,9] = v$

$4*ba-3=9$

$\therefore$ Para uma barra "ba" qualquer $\rightarrow v * c\left[1, ba\right] \rightarrow a\left[e, 4*ba-3\right] = v$

Logo:

$$c\left[1, ba\right] = p\left[ba\right] * x \rightarrow a\left[e, 4*ba-3\right] = 1$$

$$b[e] = -P + p[ba] * x$$

Segue um exemplo da montagem do algoritmo conforme exposto acima:

function cortanteP[e,ba,x,P,p] {

$a\left[e, 4*ba-3\right] = 1$

$b[e] = p[ba] * x - P$

}

B) $M[x] = -M$ em um dos nós da barra “ba”

Equação do momento fletor: $M(x) = -\left(\frac{p * x^2}{2}\right) + C_1 * x + C_2$

Condição de contorno número “e” (começa do 1):

$$M(x) = -M \rightarrow -\left(\frac{p[ba] * x^2}{2}\right) + C[1,ba] * x + C[2,ba] = -M \rightarrow$$

$$C[1,ba] * x + C[2,ba] = -M + \left(\frac{p[ba] * x^2}{2}\right)$$

Quando não houver momento concentrado no nó analisado, adota-se M=0. Sendo assim:

$$M(x) = 0 \rightarrow -\left(\frac{p[ba] * x^2}{2}\right) + C[1,ba] * x + C[2,ba] = 0 \rightarrow C[1,ba] * x + C[2,ba] = \left(\frac{p[ba] * x^2}{2}\right)$$

A correspondência de "C_2" com o "a" é $4 * ba - 2$:

Correspondência do "C_2" da barra 1 com a posição "a":

Barra 1 (ba = 1) $\rightarrow v * c[2,1] \rightarrow a[e,2] = v$

$4ba - 2 = 2$

Correspondência do "C_2" da barra 3 com a posição "a":

Barra 3 (ba = 3) $\rightarrow v * c[2,3] \rightarrow a[e,10] = v$

$4ba - 2 = 10$

$\therefore$ Para uma barra "ba" qualquer $\rightarrow v * c[2,ba] \rightarrow a[e,4 * ba - 2] = v$

Logo:

$$C[1,ba] * x + C[2,ba] = \left(\frac{p[ba] * x^2}{2}\right)$$

$a[e,4 * ba - 3] = x$

$a[e,4 * ba - 2] = 1$

$$b[e] = -M + \left(\frac{p[ba] * x^2}{2}\right)$$

Algoritmo:

function momentoM[e,ba,x,M,p] {

$a[e,4*ba-3]=x$

$a[e,4*ba-2]=1$

$b[e]=\left(\frac{p[ba]*x^2}{2}\right)-M$ }

C) $\theta[x]=0$ em um dos nós da barra “ba”

Equação do giro: $E*I*\theta(x)=-\left(\frac{p*x^3}{6}\right)+\left(\frac{C_1*x^2}{2}\right)+C_2*x+C_3$

Condição de contorno número “e” (começa do 1):

$$\theta[x]=0\rightarrow-\left(\frac{p[ba]*x^3}{6}\right)+\left(\frac{C[1,ba]*x^2}{2}\right)+C[2,ba]*x+C[3,ba]=0\rightarrow$$

$$\left(\frac{C[1,ba]*x^2}{2}\right)+C[2,ba]*x+C[3,ba]=\left(\frac{p[ba]*x^3}{6}\right)$$

A correspondência do "C_3" com o "a" é $4*ba-1$:

Correspondência do "C_3" da barra 1 com a posição "a":

Barra 1 (ba = 1) $\rightarrow v*c[3,1]\rightarrow a[e,3]=v$

$4*ba-1=3$

Correspondência do "C_3" da barra 3 com a posição "a":

Barra 3 (ba = 3) $\rightarrow v*c[3,3]\rightarrow a[e,11]=v$

$4*ba-1=11$

Para uma barra "ba" qualquer $\rightarrow v*c[3,ba]\rightarrow a[e,4*ba-1]=v$

Logo:

$a[e,4*ba-3]=\frac{x^2}{2}$

$a[e,4*ba-2]=x$

$a[e,4*ba-1]=1$

$b[e]=\left(\frac{p[ba]*x^3}{6}\right)$

Algoritmo:

function girozero[e,ba,x,p] {

$$a[e,4*ba-3]=\frac{x^2}{2*EI}$$

$$a[e,4*ba-2]=\frac{x}{EI}$$

$$a[e,4*ba-1]=\frac{1}{EI}$$

$$b[e]=\left(\frac{p[ba]*x^3}{6*EI}\right)\}$$

D) $v[x]=0$ em um dos nós da barra “ba”

Equação do deslocamento:

$$E*I*v(x)=-\left(\frac{p*x^4}{24}\right)+\left(\frac{C_1*x^3}{6}\right)+\left(\frac{C_2*x^2}{2}\right)+C_3*x+C_4$$

Condição de contorno número “e” (começa do 1):

$$v[x]=0\rightarrow-\left(\frac{p[ba]*x^4}{24}\right)+\left(\frac{C[1,ba]*x^3}{6}\right)+\frac{C[2,ba]*x^2}{2}+C[3,ba]*x+C[4,ba]=0\rightarrow$$

$$\left(\frac{C[1,ba]*x^3}{6}\right)+\frac{C[2,ba]*x^2}{2}+C[3,ba]*x+C[4,ba]=\left(\frac{p[ba]*x^4}{24}\right)$$

A correspondência do "C_4" com o "a" é 4ba:

Correspondência do "C_4" da barra 1 com a posição "a":

Barra 1 (ba = 1) $\rightarrow v*c[4,1]\rightarrow a[e,4]=v$

$4*ba=4$

Correspondência do "C_3" da barra 3 com a posição "a":

Barra 3 (ba = 3) $\rightarrow v*c[4,3]\rightarrow a[e,12]=v$

$4*ba=12$

$\therefore$ Para uma barra "ba" qualquer $\rightarrow v*c[4,ba]\rightarrow a[e,4*ba]=v$

Logo:

$$a[e,4*ba-3]=\frac{x^3}{6}$$

$$a[e,4*ba-2]=\frac{x^2}{2}$$

$$a[e,4*ba-1]=x$$

$$a[e,4*ba]=1$$

$$b[e]=\left(\frac{p[ba]*x^4}{24}\right)$$

Algoritmo:

function deslzero[e,ba,x,p] {

$$a[e,4*ba-3]=\frac{x^3}{6*EI}$$

$$a[e,4*ba-2]=\frac{x^2}{2*EI}$$

$$a[e,4*ba-1]=\frac{x}{EI}$$

$$a[e,4*ba]=\frac{1}{EI}$$

$$b[e]=\left(\frac{p[ba]*x^4}{24*EI}\right)\}$$

Agora, seguindo o mesmo raciocínio, serão apresentadas as possíveis condições de contorno de compatibilização nos nós intermediários das barras. Para essa nova análise, acresce-se que:

- “xe” é o comprimento da barra (ou trecho) à esquerda do nó analisado;

- “xd” é o comprimento à direita do nó analisado (como se analisa sempre da esquerda para a direita, o valor de “xd” será 0);

- p[bae] é a carga distribuída localizada na barra à esquerda do nó analisado;

- p[bad] é a carga distribuída localizada na barra à direita do nó analisado;

E) Compatibilidade de cortantes $(Qe[xe]-Qd[xd]=P)$ em um dos nós da barra “ba”

Condição de contorno número “e” (começa do 1):

$$p[bae]*xe+c[1,bae]+p[bad]*xd-c[1,bad]=P$$

$$\rightarrow c[1,bae]-c[1,bad]=P+p[bae]*xe-p[bad]*xd$$

Algoritmo:

function cortanteigual[e,bae,xe,bad,xd,P,p(bae),p(bad)] {

$a[e,4*bae-3]=1$

$a[e,4*bad-3]=-1$

$b[e]=P+p[bae]*xe-p[bad]*xd$ }

F) Compatibilidade de momentos $(Me[xe]-Md[xd]=M)$ em um dos nós da barra “ba”

Condição de contorno número “e” (começa do 1):

$$c[1,bae]*xe+c[2,bae]-c[1,bad]*xd+c[2,bad]=$$

$$M-\left(\frac{p[bad]*xd^2}{2}\right)+\left(\frac{p[bae]*xe^2}{2}\right)$$

Algoritmo:

function momentoigual[e,bae,xe,bad,xd,M,p(bae),p(bad)] {

$a[e,4*bae-3]=xe$

$a[e,4*bae-2]=1$

$a[e,4*bad-3]=-xd$

$a[e,4*bad-2]=-1$

$$b[e]=M+\left(\frac{p[bae]*xe^2}{2}\right)-\left(\frac{p[bad]*xd^2}{2}\right)\}$$

G) Giros compatíveis $(\theta e[xe] = \theta d[xd])$ em um dos nós da barra “ba”

Condição de contorno número “e” (começa do 1):

$$(\theta e[xe] = \theta d[xd]) \rightarrow -\left(\frac{p[bae]*xe^3}{6}\right)+\left(\frac{C[1,bae]*xe^2}{2}\right)+C[2,bae]*xe+C[3,bae]$$

$$=-\left(\frac{p[bad]*xd^3}{6}\right)+\left(\frac{C[1,bad]*xd^2}{2}\right)+C[2,bad]*xd+C[3,bad]\rightarrow\left(\frac{C[1,bae]*xe^2}{2}\right)+$$

$$C[2,bae]*xe+C[3,bae]-\left(\frac{C[1,bad]*xd^2}{2}\right)-C[2,bad]*xd-C[3,bad]=$$

$$\left(\frac{p[bae]*xe^3}{6}\right)-\left(\frac{p[bad]*xd^3}{6}\right)$$

Algoritmo:

function giroigual[e,bae,xe,bad,xd,p(bae),p(bad)] {

$$a[e,4*bae-3]=\frac{xe^2}{2*EI}$$

$$a[e,4*bae-2]=\frac{xe}{EI}$$

$$a[e,4*bae-1]=\frac{1}{EI}$$

$$a[e,4*bad-3]=-\frac{xd^2}{2*EI}$$

$$a[e,4*bad-2]=-\frac{xd}{EI}$$

$$a[e,4*bad-1]=-\frac{1}{EI}$$

$$b[e]=\left(\frac{p[bae]*xe^3}{6*EI}\right)-\left(\frac{p[bad]*xd^3}{6*EI}\right)\}$$

H) Deslocamentos compatíveis $(ve[xe] = vd[xd])$ em um dos nós da barra “ba”

Condição de contorno número “e” (começa do 1):

$$ve[xe] = vd[xd] \rightarrow -\left(\frac{p[bae]*xe^4}{24}\right)+\left(\frac{C[1,bae]*xe^3}{6}\right)+\frac{C[2,bae]*xe^2}{2}+C[3,bae]*xe+$$

$$C[4,bae] = -\left(\frac{p[bad]*xd^4}{24}\right)+\left(\frac{C[1,bad]*xd^3}{6}\right)+\frac{C[2,bad]*xd^2}{2}+C[3,bad]*xd+$$

$$C[4,bad] \rightarrow \left(\frac{C[1,bae]*xe^3}{6}\right)+\frac{C[2,bae]*xe^2}{2}+C[3,bae]*xe+C[4,bae]-$$

$$\left(\frac{C[1,bad]*xd^3}{6}\right)-\frac{C[2,bad]*xd^2}{2}-C[3,bad]*xd-C[4,bad]=$$

$$\left(\frac{p[bae]*xe^4}{24}\right)-\left(\frac{p[bad]*xd^4}{24}\right)$$

Algoritmo:

function deslocamentoigual[e,bae,xe,bad,xd,p(bae),p(bad)] {

$$a[e,4*bae-3] = \frac{xe^3}{6*EI}$$

$$a[e,4*bae-2] = \frac{xe^2}{2*EI}$$

$$a[e,4*bae-1] = \frac{xe}{EI}$$

$$a[e,4*bae] = \frac{1}{EI}$$

$$a[e,4*bad-3] = -\frac{xd^3}{6*EI}$$

$$a[e,4*bad-2] = -\frac{xd^2}{2*EI}$$

$$a[e,4*bad-1] = -\frac{xd}{EI}$$

$$a[e,4*bad] = -\frac{1}{EI}$$

$$b[e] = \left(\frac{p[bae]*xe^4}{24*EI}\right)-\left(\frac{p[bad]*xd^4}{24*EI}\right)\}$$

Terminada essa biblioteca de condições de contorno, o algoritmo verifica cada nó para aplicá-las conforme os apoios desenhados na estrutura pelo

usuário, pois para cada apoio há um conjunto de condições a ser analisado. Dito isso, são apresentadas a seguir as relações entre os apoios e as condições necessárias para a montagem do sistema global.

No primeiro nó à esquerda tem-se que:

Para apoio fixo ou móvel, com ou sem P (carga concentrada), com ou sem M (momento concentrado), as funções solicitadas são:

momentoM[e,ba,x,M,p]

deslzero[e,ba,x,p]

Para engaste:

deslzero[e,ba,x,p]

girozero[e,ba,x,p]

Para apoio livre, com ou sem P e M:

cortanteP[e,ba,x,P,p]

momentoM[e,ba,x,M,p]

Obs.: os valores de P e M serão 0 caso não haja força concentrada nem momento concentrado.

No último nó à direita tem-se:

Para apoio fixo ou móvel, com ou sem P, com ou sem M:

momentoM[e,ba,x,M,p]

deslzero[e,ba,x,p]

Para engaste:

deslzero[e,ba,x,p]

girozero[e,ba,x,p]

Para apoio livre, com ou sem P e M:

cortanteP[e,ba,x,P,p]

momentoM[e,ba,x,M,p]

Obs.: os valores de P e M serão 0 caso não haja força concentrada nem momento concentrado.

<u>Para os demais nós (internos):</u>

Para nó interno livre, com ou sem P e M:
deslocamentoigual [e,bae,xe,bad,xd,p(bae),p(bad)]
giroigual [e,bae,xe,bad,xd,p(bae),p(bad)]
cortanteigual [e,bae,xe,bad,xd,P,p(bae),p(bad)]
momentoigual [e,bae,xe,bad,xd,M,p(bae),p(bad)]

Para apoio fixo ou móvel, com ou sem P e M:
deslezero[e,bae,xe,p(bae)]
desldzero[e,bad,xd,p(bad)]
deslocamentoigual [e,bae,xe,bad,xd]
giroigual [e,bae,xe,bad,xd]
momentoigual [e,bae,xe,bad,xd,M,p(bae),p(bad)]

Para rótulas, com ou sem P:
cortanteigual [e,bae,xe,bad,xd,P,p(bae),p(bad)];
momentoMezero[e,bae,xe,M,qbe];
momentoMdzero[e,bad,xd,M,qbd];
deslocamentoigual [e,bae,xe,bad,xd,p(bae),p(bad)];

Para engaste:
deslezero[e,bae,xe,p(bae)];
desldzero[e,bad,xd,p(bad)];
giroezero[e,bae,xe,p(bae)];
girodzero[e,bad,xd,p(bad)];

5) Feito isso, o algoritmo resolverá o sistema linear $a*x=b$ pelo método de Gauss usando o algoritmo citado por Parra (2015).

6) Com o sistema linear $a*x=b$ resolvido, é realizada a correspondência de x[i] (respostas do sistema matricial) com c[nc,ba] (constantes das funções de cada

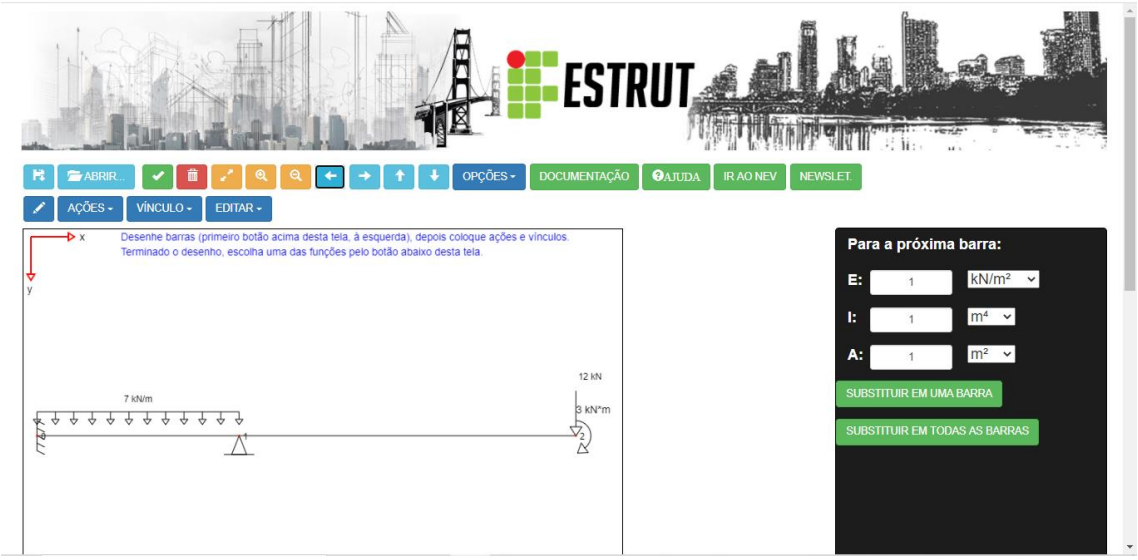
barra) por meio de uma função no algoritmo do módulo de programa referente a esta iniciação científica que associa cada x[i] à constante das funções de cada barra da estrutura desenhada pelo usuário.

7) Após a correspondência, há a montagem das equações de cada barra.

8) E, por fim, há a montagem dos gráficos, considerando cada barra desenhada.

O algoritmo da análise estrutural de vigas por Euler-Bernoulli foi implementado como um módulo do programa IFESTRUT (ver figura 1), já existente, criado por Santos Júnior, Lopes e Nirschl (2017). Esse programa permite que sejam desenhadas estruturas lineares planas contendo vários tipos de apoio e ações. Após isso, as informações da estrutura se tornam disponíveis internamente para serem utilizadas no desenvolvimento de módulos adicionais.

Figura 7 - Interface do IFESTRUT.



Fonte: Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental ([2016]).

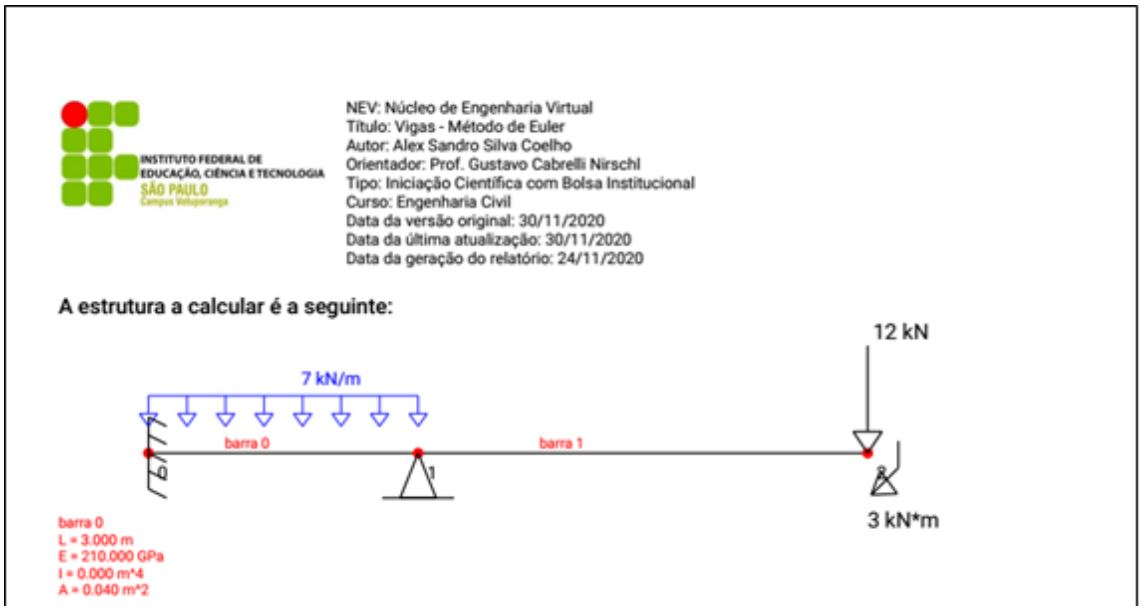
A figura 7 exemplifica uma estrutura criada cuja análise estrutural pode ser realizada pelo módulo do programa apresentado neste relatório. A figura 8 mostra o resultado apresentado por esse módulo. O gráfico apresentado inicialmente é o Momento Fletor resultante da combinação de apoios e ações escolhidas pelo usuário na figura 7.

Figura 8 - Aparência do primeiro resultado calculado pelo módulo desenvolvido.

Fonte: O próprio autor utilizando o programa desenvolvido.

Do lado direito, na Figura 8, estão botões com as opções disponíveis para que o usuário tenha acesso aos gráficos dos esforços que estão atuando na estrutura criada. São eles: Deslocamento: y (mm), Giro: teta (rad), Momento: M (kN*m) e Cortante: Q (kN). Ao clicar no botão relatório, abre-se uma nova guia com o relatório PDF, disponível inclusive para download, conforme exemplo da figura a seguir, referente à situação que vem sendo exemplificada.

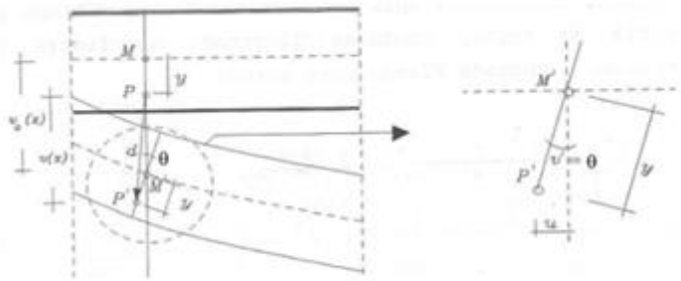
Figura 9 – Relatório PDF gerado



barra 1
L = 5.000 m
E = 320.000 GPa
I = 0.002 m^4
A = 0.160 m^2

Será desenvolvido aqui o Método da teoria de vigas de Euler-Bernoulli, conforme Proença (2003). O modelo proposto supõe que o movimento de deformação que ocorre em uma viga submetida à flexão não altera a geometria das seções, que são planas originalmente (seção que passa por M e P na figura 1); ou seja, essas seções continuarão a ser planas e ortogonais ao eixo da viga mesmo após estarem deformadas (seção que passa por M' e P' da figura 1), não importando a distância longitudinal da extremidade.

Figura 1 - Deformação de viga no modelo de Euler-Bernoulli.



Fonte: Adaptado de Proença (2003, p. 98)

Proença (2003) trabalha com a hipótese das seguintes relações:

$$v(x) = v_0(x) - y + y * \cos\theta$$

$$v(x) = v_0(x) - y * (1 - \cos\theta)$$

$$u(x) = -y * sen\theta$$

Em que (reveja na figura 1):

$v_0(x)$ é o deslocamento de um ponto M, no eixo longitudinal da viga, até M';

$v(x)$ é o deslocamento de um ponto P, a uma distância "y" de M, qualquer até P';

θ é o ângulo em que a seção transversal gira em torno do ponto M, que se confunde com $v'(x)$ naquele ponto;

$u(x)$ é o deslocamento horizontal do ponto P'.

Da Resistência dos Materiais pode-se fazer algumas simplificações como:

$$\cos\theta = 1 \; e \; sen\theta = tg\theta = \theta$$

Logo:

$$v(x) = v_0(x)$$

$$u(x) = -y * \theta$$

$$u(x) = -y * v'(x)$$

$$u(x) = -y * \frac{dv(x)}{dx}$$

Ainda da Resistência dos Materiais, é sabido que as deformações lineares e a deformação angular equivalem a:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}; \; \varepsilon_y = \frac{dv}{dy}; \; \gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

Posteriormente:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x) \\ \varepsilon_y(x) \\ \gamma_{xy}(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -y * \frac{d^2v(x)}{dx^2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Obs.: conforme acima, como gamaxy(x) é nulo, da equação 10, chega-se a:

$$\frac{du}{dy} = \frac{-dv}{dx}$$

Da lei de Hooke:

$$\sigma_x = E * \varepsilon_x \text{ e } \sigma_x = E * y * \frac{d^2v(x)}{dx^2}$$

O mesmo autor cita que o equilíbrio estático deve ser alcançado; posto isso, explicitando matematicamente e unindo à lei de Hooke, tem-se:

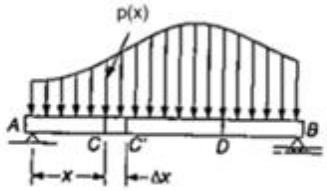
$$M = -\int \sigma_x * y dA \rightarrow M = E * \frac{d^2v(x)}{dx^2} \int y^2 dA$$

Forma-se a seguinte equação da Resistência dos Materiais:

$$M = E * I * \frac{d^2v(x)}{dx^2}$$

Beer (2011) analisa um trecho de viga sujeito a carregamento distribuído:

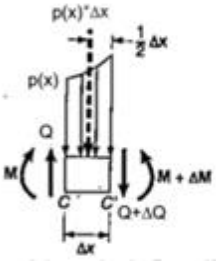
Figura 2 - Exemplo de viga sujeita a um carregamento distribuído



Fonte: Adaptado de Beer (2011, p. 790)

Desenhando o diagrama de corpo livre da parte CC' tem-se (Q é o esforço cortante):

Figura 3 - Recorte e ampliação do trecho CC' da Figura 2



Fonte: Adaptado de Beer (2011, p. 790)

Realizando o equilíbrio de forças verticais:

$$Q - (Q + \Delta Q) - p(x) * \Delta x = 0 \rightarrow \Delta Q = -p(x) * \Delta x \rightarrow \frac{dQ}{dx} = -p(x)$$

Da modelagem de Euler (sentido positivo de p(x) para cima):

$$\frac{dQ}{dx} = p(x)$$

Fazendo o equilíbrio de momentos e para dx tendendo a zero:

$$(M+\Delta M)-M-Q*\Delta x+\frac{p(x)*\Delta x^2}{2}=0$$

$$\Delta M=Q*\Delta x-\frac{p(x)*\Delta x^2}{2}$$

$$\frac{dM}{dx}=Q-\frac{p(x)*dx}{2}\rightarrow\frac{dM}{dx}=Q$$

Fazendo-se algumas correlações:

$$\frac{dQ}{dx}=p(x)\text{ e }\frac{dM}{dx}=Q\rightarrow\frac{d^2M}{dx^2}=p(x)$$

$$M=E*I*\frac{d^2v(x)}{dx^2}\text{ e }\frac{dM}{dx}=Q\rightarrow Q=E*I*\frac{d^3v(x)}{dx^3}$$

$$\frac{dQ}{dx}=p(x)\text{ e }Q=E*I*\frac{d^3v(x)}{dx^3}\rightarrow E*I*\frac{d^4v(x)}{dx^4}-p(x)=0$$

Integrando sucessivamente as equações:

$$\frac{dQ}{dx}=p(x)\rightarrow Q=\int p(x)$$

$$\frac{dM}{dx}=Q\rightarrow M=\int Q$$

$$M=E*I*\frac{d^2v(x)}{dx^2}\rightarrow E*I*\frac{dv(x)}{dx}=\int M\qquad(\text{giro }\frac{dv}{dx}=\theta)$$

$$E*I*v(x)=\int\theta(x)$$

A fim de resumo, determina-se que:

INTEGRAL ⟶

$\frac{d^2M}{dx^2}=p$	$\frac{dM}{dx}=Q$	$M=E*I*\frac{d^2v(x)}{dx^2}$	$\theta=E*I*\frac{dv(x)}{dx}$	$E*I*v(x)$
p (ação distribuída)	Q (cortante)	M (momento fletor)	θ (giro)	v (deslocamento)

⟵ DERIVADA

Conforme a teoria mostrada, a seguir são apresentadas as funções que poderão ser aplicadas para qualquer barra (posteriormente as condições de contorno serão utilizadas para obter os valores das constantes de integração).

Cortante: $Q(x)=-p*x+C_1$

Momento Fletor: $M(x)=-\left(\frac{p*x^2}{2}\right)+C_1*x+C_2$

Giro: $E*I*\theta(x)=-\left(\frac{p*x^3}{6}\right)+\left(\frac{C_1*x^2}{2}\right)+C_2*x+C_3$

Deslocamento: $E*I*v(x)=-\left(\frac{p*x^4}{24}\right)+\left(\frac{C_1*x^3}{6}\right)+\left(\frac{C_2*x^2}{2}\right)+C_3*x+C_4$

ATENÇÃO: A PARTIR DAQUI, O PROGRAMA INTERNAMENTE TRABALHA NO SISTEMA kN-m.

Abaixo segue a resolução.

A ordem do sistema é: 8

Trecho 1
Módulo de Elasticidade (E): 210,00 GPa = $2,10*10^{8}$ kN/m²
Momento de Inércia (I): $1,33*10^{-4}$ m⁴
Área da Seção Transversal (A): $4,00*10^{-2}$ m²
Comprimento da barra (L): 3,00 m
Carga distribuída (q): 7,00 kN/m

Trecho 2
Módulo de Elasticidade (E): 320,00 GPa = $3,20*10^{8}$ kN/m²
Momento de Inércia (I): $2,13*10^{-3}$ m⁴
Área da Seção Transversal (A): $1,60*10^{-2}$ m²
Comprimento da barra (L): 5.00 m
Carga distribuída (q): 0 kN/m

Nó 0

Tipo de apoio: Engaste
Condições de Contorno:

Giro = 0
Equação 1: $-(7*0^3/(6*2,10*10^8*1,33*10^{-4}))+(C1,1*0^2/(2*2,10*10^8*1,33*10^{-4}))$
$+(C2,1*0/(2,10*108*1,33*10-4))+(C3,1/(2,10*108*1,33*10-4)) = 0$ ---> 3,57*10-5*C3,1 = 0

Deslocamento = 0:
Equação 2: $-(7*0^4/(24*2,10*10^8*1,33*10^{-4}))+(C1,1*0^3/(6*2,10*10^8*1,33*10^{-4}))$
$+(C2,1*0^2/(2*2,10*108*1,33*10-4))+(C3,1*0/(2,10*108*1,33*10-4))+(C4,1/(2,10*10^8*1,33*10^{-4})) = 0$
---> 3,57*10-5*C4,1 = 0

Nó 1

Tipo de apoio: Fixo
Condições de Contorno de Compatibilização:

Momento à esquerda do apoio = Momento à direita do apoio
Equação 3: $-(7*3^2/2)+(C1,1*3)+C2,1 = -(0*0^2/2)+(C1,2*0)+C2,2$ ---> 3*C1,1+C2,1-C2,2 = 31,5

Giro à esquerda do apoio = Giro à direita do apoio
Equação 4: $-(7*3^3/(6*2,10*10^8*1,33*10^{-4}))+(C1,1*3^2/(2*2,10*10^8*1,33*10^{-4}))+(C1,2*3/(2,10*10^8*1,33*10^{-4}))$
$+(C1,3/(2,10*108*1,33*10^{-4})) = -(0*0^3/(6*3,20*108*2,13*10^{-3}))+(C1,2*0^2/(2*3,20*10^8*2,13*10^{-3}))$
$+(C2,2*0/(3,20*108*2,13*10^{-3}))+(C3,2/(3,20*108*2,13*10^{-3}))$
$1,61*10^{-4}*C1,1+1,07*10^{-4}*C2,1+3,57*10^{-5}*C3,1-1,46*10^{-6}*C3,2= 1,13*10^{-3}$

Deslocamento Vertical à esquerda do apoio = 0
Equação 5: $-(7*3^4/(24*2,10*10^8*1,33*10^{-4}))+(C1,1*3^3/(6*2,10*10^8*1,33*10^{-4}))+(C2,1*3^2/(2*2,10*10^8*1,33*10^{-4}))$
$+(C3,1*3/(2,10*108*1,33*10^{-4}))+(C4,1/(2,10*10^8*1,33*10^{-4})) = 0$
---> $1,61*10^{-4}*C1,1+1,61*10^{-4}*C2,1+1,07*10^{-4}*C3,1+3,57*10^{-5}*C4,1 = 8,44*10^{-4}$

Deslocamento Vertical à direita do apoio = 0
Equação 6: $-(0*0^4/(24*3,20*10^8*2,13*10^{-3}))+(C1,2*0^3/(6*3,20*10^8*2,13*10^{-3}))+(C2,2*0^2/(2*3,20*10^8*2,13*10^{-3}))$
$+(C3,2*0/(3,20*108*2,13*10^{-3}))+(C4,2/(3,20*10^8*2,13*10^{-3})) = 0$ ---> $-1,46*10^{-6}*C4,2 = 0$

Nó 2

Tipo de apoio: Livre
Condições de Contorno:

Cortante = P (Carga Concentrada no nó)
Equação 7: -(0*5)+C1,2 = 12 ---> C1,2 = 12

Momento Fletor = M (Momento Concentrado no nó)
Equação 8: $-(0*5^2/2)+(C1,2*5)+C2,2 = -3$ ---> 5*C1,2+C2,2 = -3

Segue abaixo a matriz do sistema linear final, do tipo Ax=B:

	C1,1	C2,1	C3,1	C4,1	C1,2	C2,2	C3,2	C4,2	x	B		
Equação 1	0,00	0,00	3,57E-05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	**C1,1**	0,00		-18,38
Equação 2	0,00	0,00	0,00	3,57E-05	0,00	0,00	0,00	0,00	**C2,1**	0,00		23,63
Equação 3	3,00	1,00	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	**C3,1**	31,50		0,00
Equação 4	1,61E-04	1,07E-04	3,57E-05	0,00	0,00	0,00	-1,46E-06	0,00	* **C4,1**	= 1,13E-03	--->x =	0,00
Equação 5	1,61E-04	1,61E-04	1,07E-04	3,57E-05	0,00	0,00	0,00	0,00	**C1,2**	8,44E-04		12,00
Equação 6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,46E-06	**C2,2**	0,00		-63,00
Equação 7	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	**C3,2**	12,00		-1056,00
Equação 8	0,00	0,00	0,00	0,00	5,00	1,00	0,00	0,00	**C4,2**	-3,00		0,00

As equações finais de cada trecho são:

Trecho 1 - Nós (0-1)

Cortante: $Q(x) = -(7*x)-18,375$

Momento: $M(x) = -(7*x^2/2)+(-18,375*x)+23,625$

Giro: $\theta(x) = -(7*x^3/(6*2,10*10^8*1,33*10^{-4}))+(-18,375*x^2/(2*2,10*10^8*1,33*10^{-4}))+(23,625*x/(2,10*10^8*1,33*10^{-4}))+(0/(2,1*108*1,33*10^{-4}))$

Deslocamento: $v(x) = -(7*x^4/(24*2,10*10^8*1,33*10^{-4}))+(-18,375*x^3/(6*2,10*10^8*1,33*10^{-4}))+(23,625*x^2/(2*2,10*108*1,33*10^{-4}))+(0*x/(2,10*108*1,33*10^{-4}))+(0/(2,10*10^8*1,33*10^{-4}))$

Trecho 2 - Nós (1-2)

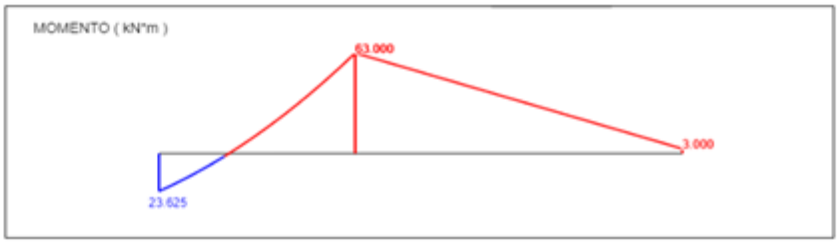
Cortante: $Q(x) = -0*x+12$

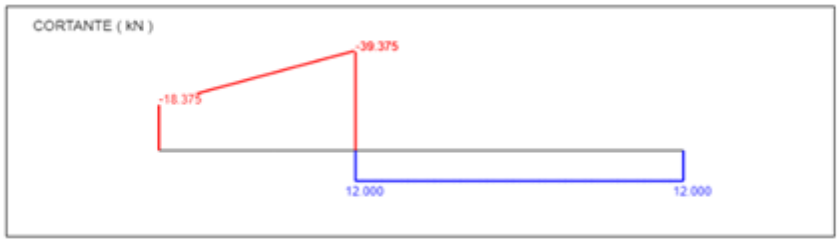
Momento: $M(x) = -(0*x^2/2)+(12*x)-63$

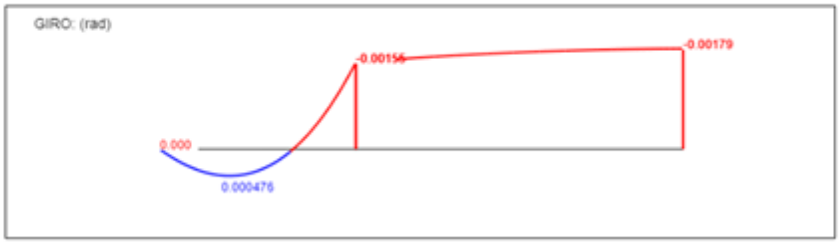
Giro: $\theta(x) = -(0*x^3/(6*3,20*10^8*2,13*10^{-3}))+(12*x^2/(2*3,20*10^8*2,13*10^{-3}))+(-63*x/(3,20*10^8*2,13*10^{-3}))+(-1056/(3,2*108*2,13*10^{-3}))$

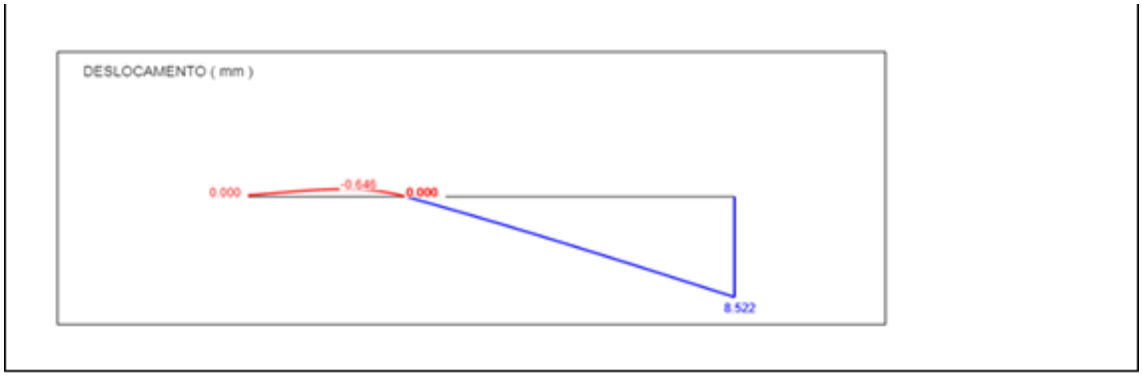
Deslocamento: $v(x)= -(0*x^4/(24*3,20*10^8*2,13*10^{-3}))+(12*x^3/(6*3,20*10^8*2,13*10^{-3}))+(-63*x^2/(2*3,20*10^8*2,13*10^{-3}))+(-1056*x/(3,20*108*2,13*10^{-3}))+(0/(3,20*10^8*2,13*10^{-3}))$

Abaixo seguem os diagramas (no sistema kN-m):









Fonte: O próprio autor utilizando o programa desenvolvido.

CONCLUSÃO (RESULTADOS DA PESQUISA)

O resultado esperado foi obtido com sucesso, portanto o projeto já pode ser utilizado por qualquer usuário interessado no assunto além de alunos e professores do curso de Engenharia Civil do IFSP - Campus Votuporanga. Posto isso, vale ressaltar que a disponibilidade do acesso ao memorial de cálculo detalhado em PDF, realizado pelo módulo de software *online*, facilita a análise de possíveis erros cometidos em projetos ou objetos de estudo do usuário.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FTOOL. 4.00. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), 2017. Versão Básica Gratuita. Disponível em: https://www.ftool.com.br/Ftool/. Acesso em: 15 nov. 2020.

PDFMAKE. Disponível em < http://pdfmake.org/#/ >. Acesso em: 18 ago. 2020.

SANTOS JÚNIOR, Luciano José dos; LOPES, Alex Junio Fidelis; NIRSCHL, Gustavo Cabrelli. Programa base cad para a análise de estruturas lineares. *In*: CONGRESSO DE INOVAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DO IFSP, 7., 2016, Matão. **Anais** [...]. [*S. l.: s. n.*], 2016. Disponível em: http://mto.ifsp.edu.br/images/CPI/Anais/IC/1720.pdf. Acesso em: 18 nov. 2020.

NÚCLEO DE ENGENHARIA VIRTUAL E EXPERIMENTAL. **NEV – NÚCLEO DE ENGENHARIA VIRTUAL.** Votuporanga, 2015. Disponível em: http://vtp.ifsp.edu.br/nev/. Acesso em: 18 nov. 2020.

NÚCLEO DE ENGENHARIA VIRTUAL E EXPERIMENTAL. **IFESTRUT.** Votuporanga, [2016]. Disponível em: http://vtp.ifsp.edu.br/nev/Ifestrut/ifestrut.html. Acesso em: 23 nov. 2020.

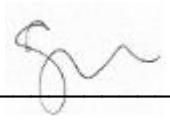
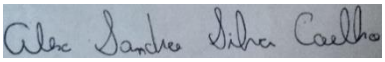
TQS, versão 18. [S.l.]: TQS Informática, 2017.

BEER, F.P.; JOHNSTON, E.R.Jr. Resistência dos materiais. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 2011.

BITTENCOURT, Marco Lúcio. CAPÍTULO 6: Viga. Unicamp, 2003. Disponível em: <http://www.fem.unicamp.br/~em421/semII-1999/textos/viga.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2020.

PROENÇA, Sergio Persival Baroncini Proença. Curso de resistência dos materiais. Notas de aula – vol. 1. São Carlos: USP, 2003.

PARRA, I. C. D.; NIRSCHL, G. C. Sistemas lineares por eliminação de Gauss. 2015. Disponível em: <http://vtp.ifsp.edu.br/nev/Sistema-gauss/sistemagauss.php?>. Acesso em: 28 ago. 2020.

Assinatura do orientador:

Assinatura do bolsista: